

Topologia

Lista 5 (topologia, ciągłość funkcji)

Zad 1. Opisać topologię oraz rodzinę zbiorów domkniętych w przestrzeni z metryką dyskretną.

Zad 2. Które z podanych rodzin stanowią topologię na zbiorze $X = \{a, b, c\}$:

- | | |
|--|---|
| a) $\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$, | c) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$, |
| b) $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$, | d) $\{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$. |

Zad 3. Pokazać, że w każdej przestrzeni topologicznej metryzowalnej (to jest takiej, w której topologia pochodzi od metryki)

- a) zbiór jednoelementowy jest domknięty,
- b) spełniony jest warunek Hausdorffa.

Zad 4. Sprawdzić, które z danych rodzin są topologiami na \mathbb{N} :

$$F_1 = \{\{1, 2, 3, \dots, n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}, \quad F_2 = \{\{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\},$$

$$F_3 = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ jest zbiorem skończonym lub } A = \mathbb{N}\},$$

$$F_4 = \{A \subset \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A \text{ jest zbiorem skończonym lub } A = \emptyset\}$$

Dla rodzin będących topologiami wyznaczyć rodziny zbiorów domkniętych i sprawdzić, czy są to spełniają one aksjomaty oddzielania T_1, T_2 .¹

Zad 5. Niech $f : X \rightarrow Y$ będzie odwzorowaniem, gdzie X jest zbiorem a (Y, τ) przestrzenią topologiczną. Czy rodzina $\tau_f = \{f^{-1}(U) : U \in \tau\}$ jest topologią na X ?

Zad 6. Sprawdzić, że jeżeli (X, τ) jest przestrzenią topologiczną i $A \subset X$, to para (A, τ_A) , gdzie $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$ jest przestrzenią topologiczną.

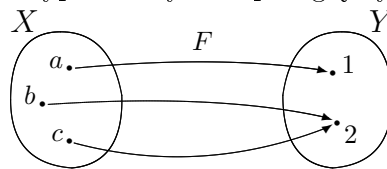
Zad 7. Podać przykład funkcji na prostej euklidesowej, która jest ciągła tylko w jednym punkcie.

Zad 8. Podać przykład funkcji na prostej euklidesowej, ciągłej tylko w liczbach niewymiernych.

Zad 9. Niech $(X, d_X), (Y, d_Y)$ będą przestrzeniami metrycznymi. Wykazać, że odwzorowanie $f : X \rightarrow Y$ jest

- a) ciągłe w punkcie $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego otwartego otoczenia V punktu $f(x_0)$ istnieje otwarte otoczenie U punktu x_0 takie, że $U \subset f^{-1}(V)$.
- b) ciągłe w każdym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru otwartego $V \subset Y$ zbiór $f^{-1}(V)$ jest otwarty.

Zad 10. Niech $Y = \{1, 2\}$ będzie wyposażony w topologię dyskretną i niech F będzie funkcją daną przez diagram



Wyznaczyć wszystkie topologię na $X = \{a, b, c\}$, dla których F jest odwzorowaniem ciągłym.

Zad 11. Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi. Wyznaczyć wszystkie odwzorowania ciągłe $f : X \rightarrow Y$, gdy

- a) X jest wyposażony w topologię dyskretną,
- b) Y jest wyposażony w topologię antydyskretną.

Zad 12. Pokazać, że zbiór punktów stałych ciągłego odwzorowania $f : X \rightarrow X$ przestrzeni Hausdorffa X jest zbiorem domkniętym.

¹Litera T pochodzi od niemieckiego słowa *Trennung* (oddzielenie)